23/04/20

**Άσκηση 1** (Από pdf Εισαγωγή στην Επιχ. Έρευνα σελ 22)

Μια επιχείρηση που λειτουργεί εντός ενός βιομηχανικού μεταποιητικού κλάδου παράγει δύο διαφορετικά προϊόντα, το προϊόν 1 και το προϊόν 2.
Η παραγωγή του κάθε τεμαχίου απαιτεί συγκεκριμένο χρόνο λειτουργίας δύο μηχανών διαφορετικού τύπου, δηλ τύπου Α και τύπου Β.
Η μηχανή τύπου Α μπορεί να χρησιμοποιηθεί για είκοσι (20) ώρες ανά μέρα ενώ η μηχανή τύπου Β είναι διαθέσιμη για 12 ώρες ανά ημέρα.
Προκειμένου να παραχθεί μια μονάδα ~~παραγωγής~~ προϊόντος 1 απαιτούνται 2 ώρες λειτουργίας της μηχανής τύπου Α και 1 ώρα της μηχανής τύπου Β. Ενώ για να παραχθεί μια μονάδα προϊόντος 2 απαιτούνται 4 ώρες λειτουργίας της μηχανής τύπου Α και 3 της μηχανής τύπου Β.
~~Το αντίστοιχο κέρδος~~
Το αντίστοιχο (μικτό) κέρδος για την επιχείρηση ανέρχεται σε 40€ για κάθε μονάδα του προϊόντος 1 και 100€ για κάθε μονάδα του προϊόντος 2.
Η επιχείρηση έχει τη δυνατότητα να διοχετεύσει στην αγορά όλη την παραγόμενη ποσότητα και από τα δύο προϊόντα με σκοπό να μεγιστοποιήσει το κέρδος της. Ζητείται να προσδιορίσετε την ποσότητα των τεμαχίων ανά προϊόν που πρέπει να παράγει η εν λόγω επιχείρηση ημερησίως προκειμένου να πετύχει το σκοπό που έχει θέσει.

**Λύση**

$x_1 \rightarrow$ η ποσότητα που παράγεται ημερησίως από το προϊόν 1

$x_2 \rightarrow$ » » » » » » 2

Θέλω μεγιστοποίηση κέρδους. Άρα η αντικειμενική συνάρτηση είναι:

$$\max_{x_1, x_2} \Pi = 40x_1 + 100x_2$$

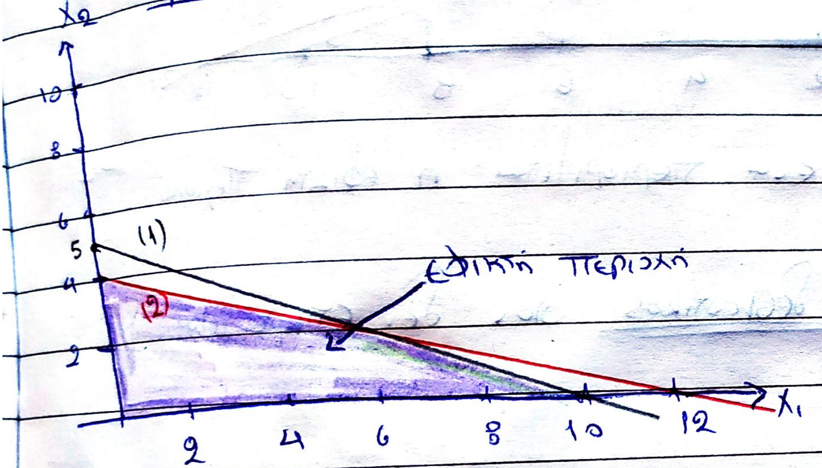
**Περιορισμοί**: για μηχανή τύπου Α: $2x_1 + 4x_2 \leq 20$

μηχανή τύπου Β: $x_1 + 3x_2 \leq 12$

Άρα έχω το πρόβλημα: $\max_{x_1,x_2} \Pi = 40x_1 + 100x_2$

$$2x_1 + 4x_2 \le 20 \quad (1)$$
$$x_1 + 3x_2 \le 12 \quad (2)$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Γραφική Επίλυση




Για να βρούμε το σημείο που μεγιστοποιεί την αντικ. συνάρτηση λύνουμε ταυτόχρονα το σύστημα των περιορισμών:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 20 \\ x_1 + 3x_2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24 - 6x_2 + 4x_2 = 20 \\ x_1 = 12 - 3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 = 4 \\ x_1 = 12 - 3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Άρα $(x_1 = 6,\ x_2 = 2)$ μεγιστοποιείται η αντικ. συνάρτηση δηλ. $\max \Pi = 40 \cdot 6 + 100 \cdot 2 = 440$

Ανάλυση Ευαισθησίας: Στα ΠΓΠ εξίσου σημαντικό με την εύρεση των ποσοτήτων που βελτιστοποιούν την τιμή της αντικ. συνάρτησης είναι το εάν και κατά πόσο η βέλτιστη λύση που προέκυψε είναι αξιόπιστη ως προς τις (οριακές) αλλαγές των παραμέτρων του προβλήματος. Γι' αυτό καταφεύγουμε στην ανάλυση ευαισθησίας των ~~παραμέτρων~~ παραμέτρων του προβλήματος. Γι' αυτό καταφεύγουμε στην ανάλυση ευαισθησίας των ποσοτήτων του δεξιού μέλους περιορισμών του προβλήματος μεταβάλλοντας οριακά τις διαθέσιμες ποσότητες του δεξιού μέλους.

- Παράδειγμα στο υπάρχον παραπάνω πρόβλημα:

Έστω ότι η αγορά στην οποία προσφέρει τα προϊόντα που παράγει η παραπάνω επιχείρηση δεν μπορεί να απορροφήσει παραπάνω από 8 μονάδες του προϊόντος 1. Έτσι το πρόβλημα διαφοροποιείται προσθέτοντας έναν ακόμα περιορισμό και παίρνει την μορφή:

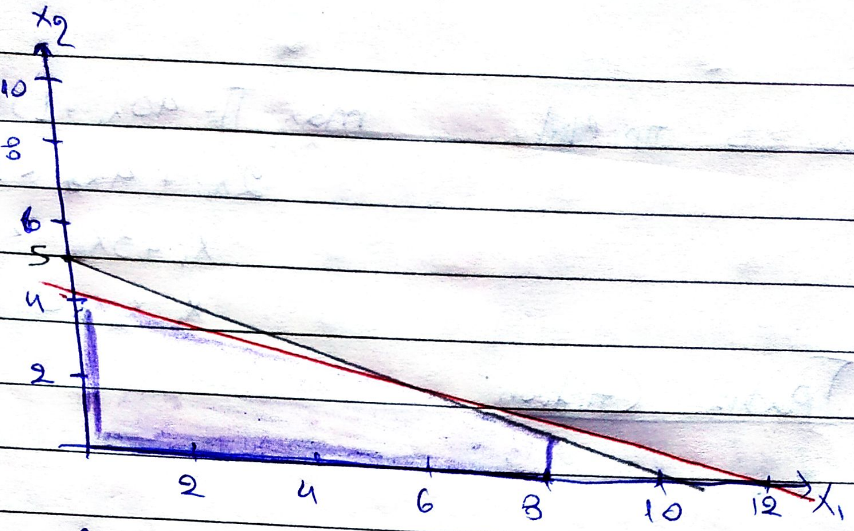
$$\max_{x_1,x_2} \Pi = 40x_1 + 100x_2$$

$2x_1 + 4x_2 \leq 20$ (1)

$x_1 + 3x_2 \leq 12$ (2)

$x_1 \leq 8$ (3)

$x_1, x_2 \geq 0$




Το βέλτιστο σημείο δεν επηρεάζεται ενώ περιορίζεται η εφικτή περιοχή

⇓

Ο νέος περιορισμός είναι μη δεσμευτικός όταν δεν επηρεάζεται η βέλτιστη λύση.

Σε αντίθετη περίπτωση ονομάζεται δεσμευτικός.

- Αύξηση των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου A.

Ας υποθέσουμε ότι η διοίκηση της επιχείρησης αποφασίζει να αυξήσει τις ώρες λειτουργίας της μηχανής τύπου A

Τώρα ο περιορισμός γίνεται: $2x_1 + 4x_2 \leq 21$

Θέλουμε να εξετάσουμε αν οι οριακές μεταβολές θα επιφέρουν αλλαγές στη βέλτιστη λύση

Λύνουμε το σύστημα: $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 21 \\ x_1 + 3x_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7{,}5 \\ x_2 = 1{,}5 \end{cases}$

Η βέλτιστη λύση άλλαξε κι ως εκ τούτου και η εφικτή περιοχή

Έχουμε τις εξής αλλαγές: $\Delta x_1 = 7{,}5 - 6 = 1{,}5 > 0$ Αύξηση

$\Delta x_2 = 1{,}5 - 2 = -0{,}5 < 0$ Μείωση

$\boxed{\text{η μεταβολή της αντικ. συνάρτησης}}$ $\Pi = 40 \cdot (1{,}5) + 100(-0{,}5) = 60 - 50 = 10 > 0$

Η μεταβολή είναι θετική (=10) επομένως η αύξηση στις ώρες λειτουργίας της μηχανής τύπου A επιφέρει μια αύξηση κέρδους κατά 10 ευρώ.

Η παραπάνω ποσότητα ονομάζεται Σκιώδης Τιμή

Αντίστοιχα ο υπολογισμός θα μπορούσε να γίνει από τον υπολογισμό των τιμών της αντ. συνάρτησης

$$\left.\begin{aligned} \Pi_1 &= 40\cdot 6 + 100\cdot 2 = 440 \\ \Pi_2 &= 40\cdot 7{,}5 + 100\cdot 1{,}5 = 450 \end{aligned}\right\} \Delta\Pi = 450 - 440 = 10 > 0$$

- **Μείωση των ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου Α**

Ο περιορισμός γίνεται $2x_1 + 4x_2 \leq 19$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 19 \\ x_1 + 3x_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4{,}5 \\ x_2 = 2{,}5 \end{cases}$$

$$\Delta x_1 = 4{,}5 - 6 = -1{,}5 < 0$$

$$\Delta x_2 = 2{,}5 - 2 = 0{,}5 > 0$$

Σκιώδης Τιμή: $40(-1.5) + 100(0.5) = -10 < 0$

Πρακτικά σημαίνει ότι στην περίπτωση αυτή το κέρδος της επιχείρησης μειώνεται κατά 10 €

- Όμοια για αύξηση και μείωση για τη μηχανή τύπου Β.

- **Μεταβολές του μη-δεσμευτικού περιορισμού**

Όσον αφορά στον μη δεσμευτικό περιορισμό του προβλήματος η οριακή μεταβολή του είτε ως προς αύξηση είτε ως προς μείωση δεν επιφέρει καμία αλλαγή στην βέλτιστη λύση άρα και στην αντικ. συνάρτηση.
Συνεπώς η Σκιώδης Τιμή με την οποία συνδέεται αυτός ο περιορισμός είναι μηδέν

- Ταυτόχρονη μεταβολή (αύξηση ή μείωση) των περιορισμών διαθεσιμότητας.

$2x_1 + 4x_2 \leq 19$

$x_1 + 3x_2 \leq 11$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 19 \\ x_1 + 3x_2 = 11 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6,5 \\ x_2 = 1,5 \end{cases}$$

Η βελτ. λύση αλλάζει και η εφικτή περιοχή αλλάζει

$\Delta x_1 = 6.5 - 6 = 0,5 > 0$

$\Delta x_2 = 1,5 - 2 = -0,5 < 0$

Προσοχή: Δεν μπορούμε να υπολογίσουμε σκιώδης τιμή για αυτή τη μεταβολή αφού συνδέεται για την οριακή μεταβολή ενός και μόνο περιορισμού.

- Μεταβολή των συντελεστών συμμετοχής των προϊόντων στην αντικ. συνάρτηση.

Ας υποθέσουμε ότι αυξάνεται η τιμή του προϊόντος 2 κατά 10€ και γίνεται ίση με 110€. Η τιμή της αντικ. συνάρτησης γίνεται $\Pi = 40 \cdot 6 + 110 \cdot 2 = 460$

Τότε το βέλτιστο σημείο δεν αλλάζει

- Αν η τιμή του προϊόντος 2 γίνει 120€ η τιμή $\Pi = 40 \cdot 6 + 120 \cdot 2 = 480$ το βέλτιστο σημείο πάλι δεν αλλάζει ενώ η κλίση της αντικ. συνάρτησης είναι ίση με την κλίση της ευθείας (2)

Τέλος αν η τιμή γίνει 140€

Σε αυτή τη περίπτωση το βέλ. σημείο αλλάζει και γίνεται $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

Η επιχείρηση έχει στρέψει ολόκληρους τους πόρους της στην παραγωγή του προϊόντος 2 $(x_1 = 0)$

Διαμορφώνεται δηλαδή ένα εύρος διακύμανσης εντός του οποίου υπάρχουν διαφορετικά επίπεδα κέρδους χωρίς να αλλάζει το βέλτιστο σημείο